# Colles de Maths - semaine 12
# Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Questions de cours**

- Sous-groupe de $\mathbb{Z}$
- Relation entre PGCD et PPCM
- Il existe une infinité de nombres premiers
- Petit théorème de Fermat
- Unicité de l'inverse dans un groupe
- Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par le noyau
- CNS pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps

## Arithmétique

**Exercice 1** Soit $p$ un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
2. Déterminer le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de l'entier 100!.

**Exercice 2**

1. On appelle $p_n$ le $n^e$ nombre premier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $p_n < 2^{2^n}$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n + 3$.

## Groupes

**Exercice 3** Soit $p$ un nombre premier. Notons $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.

On appelle ordre de $z \in G$ le plus petit exposant $k > 0$ tel que $z^k = 1$. On admet que $z$ est d'ordre $k$ si et seulement si tout élément de $\mathbb{U}_k$ est une puissance de $z$.

1. Montrer que $G$ est un sous-groupe infini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Soit $H$ un sous-groupe strict de $G$. Soit $z_0 \in G \setminus H$, d'ordre $p^{n_0}$.
   (a) Montrer que si $H$ contient un élément d'ordre $p^n$, alors $\mathbb{U}_{p^n} \subset H$.
   (b) Montrer que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.
   (c) En déduire qu'il existe $n$ tel que $H = \mathbb{U}_{p^n}$.

**Exercice 4** Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que soit $G$ est monogène, soit $G$ est dense dans $\mathbb{Z}$.
2. En déduire une preuve du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 5** Soit $G$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est un maximal s'il est distinct de $G$ et n'est contenu dans aucun autre sous-groupe de $G$ que $G$ et $H$.

1. $Z$ admet-il des sous-groupes maximaux ?
2. $Q$ admet-il des sous-groupes maximaux ?

**Exercice 6** Soit $(G, \times)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1$. Montrer que $G$ est un groupe commutatif.

## Anneaux

**Exercice 7** Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

**Exercice 8** Soit $A$ un anneau intègre fini. Montrer que $A$ est un corps.